Algebra z geometrią - zadania na ćwiczenia
seria 4

Zadania „obowiązkowe”:

1. Niech f będzie bazą przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$. Znajdź elementy bazy dualnej f^* przestrzeni V^*, jeśli

$$\text{a) } f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

2. Sprawdzić, że $V := \mathbb{R}^4$ jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2. Znaleźć odpowiadające temu rozkładowi rzuty P_1 na V_1 oraz P_2 na V_2, jeśli

   (a) $V_1 = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};$

   (b) $V_1 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

3. Niech $V = \mathbb{R}_3[\,\cdot\,]$, określmy formy liniowe $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in V^*$ wzorami

$$\phi_1(v) := v(1),\ \ \phi_2(v) := v(2),\ \ \phi_3(v) := v(0),\ \ \phi_4(v) := \dot{v}(0).$$

   a) Znaleźć bazę e_1, e_2, e_3, e_4 przestrzeni V dualną do $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.

   b) Znaleźć rozkład $w \in V$ w bazie e_1, e_2, e_3, e_4 jeśli $w(t) := t^3 + 2t^2$.

   c) Znaleźć rozkład $\psi \in V^*$ w bazie $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ jeśli $\psi(v) := v(-2)$.

   d) Przedstawić $D^*\phi_4$ jako kombinację liniową $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, jeśli $D \in \operatorname{End}(V)$ jest operatorem różniczkowania: $D(v) := \dot{v}$.

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są formy dwuliniowe:

   (a) $b(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_1 - x_3y_3$

   (b) $b(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 - 4x_2y_3$

   Znaleźć macierze tych form w bazie standardowej w $\mathbb{R}^3$ oraz rozkłady na sumę formy symetrycznej i antysymetrycznej. Następnie znaleźć formy kwadratowe odpowiadające powyższym formom dwuliniowym.

Zadania „rezerwowe” - w razie jakby było „obowiązkowych” za mało:

1. Macierz odwzorowania $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ w bazie standardowej dana jest wzorem:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Sprawdzić, że jej wielomian charakterystyczny T to $\omega_T(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$.

   (b) Znaleźć wartości własne i wektory własne T.

   (c) Znaleźć macierz Q, taką że $T = QDQ^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną (zdiagonalizować T).

   (d) Znaleźć rozkład $\mathbb{R}^4$ na sumę prostą dwóch podprzestrzeni własnych T.

2. Znaleźć macierz formy kwadratowej Q w bazie $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, jeśli forma $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

(a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$

3. Niech $V := \mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$. Sprawdzić, że $Q\colon V \to \mathbb{R}$, $Q(w) := \int_0^1 w(t^2)\dot{w}(1-t)dt$ jest formą kwadratową. Obliczyć $b(u,v)$, jeśli $u(t) = (t+2)^2$, $v(t) = (t-2)^2$, gdzie b jest symetryczną formą dwuliniową odpowiadającą Q. Znaleźć macierz $[Q]_e$ formy Q w bazie jednomianów $1, t, t^2$.

4. Sprawdzić, że baza dualna do bazy $e = (1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^n}{n!})$ w $\mathbb{R}_n[x]$ jest dana przez $e_k^*(w) = w^{(k)}(0)$ dla $k = 1, \ldots, n$. Uzasadnić, że $w = \sum_{k=0}^n w^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$
(*wzór Taylora* dla wielomianów).

5. Znaleźć współrzędne formy liniowej $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ w bazie f^*, gdzie $f = (e_1 + e_2 - e_3, 3e_1 - e_2, -2e_2 + e_3)$ jest bazą w $\mathbb{R}^3$, jeśli

   a) $\phi(x) = x_1 + x_2 + x_3$; b) $\phi(x) = 2x_1 - x_2 - x_3$; c) $\phi(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$;

6. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, że $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V^*$ dane wzorem $\phi_k(x) = -x_1 + 2x_2 + x_3 - kx_k$, gdzie $k = 1, 2, 3$ są liniowo niezależne. Znaleźć macierz F^* w tej bazie, jeśli $F\colon V \to V$ dane jest wzorem

   a) $F\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$, b) $F\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_2 \\ 2x_2+x_3 \\ x_1-3x_2-2x_3 \end{bmatrix}$.

7. Operator $F \in L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}_n[\,\cdot\,])$ zdefiniowany jest następująco:

$$(F(x))(t) := x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots x_nt^n \quad \text{dla } x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

   Znaleźć $F^*(\phi) \in (\mathbb{R}^{n+1})^* = \mathbb{R}_{n+1}$, jeśli $\phi \in \mathbb{R}_n[\,\cdot\,]^*$ jest formą określoną wzorem:

   a) $\langle \phi, v \rangle := v(2)$, b) $\langle \phi, v \rangle := v(-t_0)$, c) $\langle \phi, v \rangle := t_0 v'(2t_0)$, d) $\langle \phi, v \rangle := \int_a^b v(t)dt$

8. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są formy dwuliniowe:

   (a) $b(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_3$

   (b) $b(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2$

   Znaleźć macierze tych form w bazie standardowej w $\mathbb{R}^3$ oraz rozkłady na sumę formy symetrycznej i antysymetrycznej. Następnie znaleźć formy kwadratowe odpowiadające powyższym formom dwuliniowym.

9. Znaleźć macierz formy kwadratowej Q w bazie $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, jeśli forma $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

   (a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$

   (b) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2x_3$