# Algebra z geometrią - zadania na ćwiczenia
## seria 3

**Zadania „obowiązkowe”:**

1. Dla podanych macierzy znaleźć wektory i wartości własne. Sprawdzić, które z macierzy są diagonalizowalne. Dla diagonalizowalnych znaleźć macierz przejścia do bazy diagonalizujacej i macierz do niej odwrotną (czyli rozkład $QDQ^{-1}$, gdzie $D$ jest macierzą diagonalną).

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$,

   (d) $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

2. Macierz odwzorowania $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ w bazie standardowej dana jest wzorem:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Sprawdzić, że jej wielomian charakterystyczny $T$ to $\omega_T(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$.

   (b) Znaleźć wartości własne i wektory własne $T$.

   (c) Znaleźć macierz $Q$, taką że $T = QDQ^{-1}$, gdzie $D$ jest macierzą diagonalną (zdiagonalizować $T$).

   (d) Znaleźć rozkład $\mathbb{R}^4$ na sumę prostą dwóch podprzestrzeni własnych $T$.

**Zadania „rezerwowe”:**

1. Znaleźć wartości i wektory własne podanych przekształceń liniowych:

   (a) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 4y-x \end{bmatrix}$;

   (b) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+2y \\ -x-y-z \end{bmatrix}$;

   (c) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-2y+2z \\ 2x+2z \\ y+z-x \end{bmatrix}$;

   (d) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ x+2y+z \\ -x+y \end{bmatrix}$;

   (e) $T \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$, $(Tp)(x) = (x+1)p'(x)$;

   (f) $T \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$, $(Tp)(x) = 2xp'(-x) + 3x^2p(-1) + p(1)$;

   (g) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y \\ 10x-3y \end{bmatrix}$;

   (h) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2i)x+5y \\ (1+i)x-(1-3i)y \end{bmatrix}$;

   (i) $T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^3)$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ix-2z \\ 3y \\ 2x-2iz \end{bmatrix}$;

   W których z powyższych przypadków wektory własne tworzą bazę przestrzeni?