Algebra z geometrią - zadania na ćwiczenia
seria 2

Zadania „obowiązkowe”:

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & p & -p \\ 0 & 2p & 0 & p-1 \\ p & 0 & 2p-1 & -p \\ 0 & p & 0 & p-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+p \\ 1 \\ p \end{bmatrix}.$$

2. Niech $V_n \in \mathbb{R}^n_n$. Wykazać korzystając z zasady indukcji matematycznej, że

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Zadania „rezerwowe” - w razie jakby było „obowiązkowych” za mało:

1. Dla układu równań

$$\begin{pmatrix} 3\lambda - 1 & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 & 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

określić liczbę rozwiązań (i znaleźć je) w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3-t \end{bmatrix}.$$

Dla jakich wartości parametru t macierz ta jest nieosobliwa?

3. Dla układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} (3+a)x + y + az = -1 \\ x + ay + z = a^2 \\ x + y + az = a \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} x + by + z = 1 \\ 2x - y - bz = 0 \\ x + 10y + 6z = b \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + ay + (a+5)z = b \end{cases}$$

określić liczbę rozwiązań (i znaleźć je) w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \text{ wiedząc, że } \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 0 & u & x & z \\ -u & 0 & v & y \\ -x & -v & 0 & w \\ -z & -y & -w & 0 \end{bmatrix}$$