

Algebra z geometrią - zadania na ćwiczenia seria 1

Zadania „obowiązkowe”:

1. Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych niejednorodnych:

$$(a) \begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 1 \\ 4x + 5y + z + t = 4, \\ 6x + 9y - z + 2s - 3t = 6 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 6x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 2y - z + 3t = 6 \\ 8x + 2y + 7z - 3t = 10 \end{cases}.$$

2. Podprzestrzenie $U, V \in \mathbb{R}^4$ zadajmy wzorami $U := \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
Znaleźć:

- (a) takie bazy U i V , że ich wspólne wektory tworzą bazę $U \cap V$;
(b) równania opisujące $U + V$.

3. Obliczyć wyznaczniki macierzy (redukując macierz do postaci trójkątnej).

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, które z powyższych macierzy są nieosobliwe.

Zadania „rezerwowe” - w razie jakby było „obowiązkowych” za mało:

1. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$
$$(b) \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, które z powyższych macierzy są nieosobliwe.

2. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 2t = 1, \\ 2x + y - z + t = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} t - 4x + y + 2z = 1 \\ t + 5x + y - z = 7 \\ 2t - 7x - 2y + z = -4 \\ 3t - x + y + z = 7 \\ t + 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$