Algebra z geometrią - zadania na ćwiczenia
seria 1

Zadania „obowiązkowe”:

1. Niech $A := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 \\ -3 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker A$, $V_1 := \operatorname{Im} A$. Znaleźć:

   (a) takie bazy podprzestrzeni V_0 i V_1, by ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$;

   (b) układ równań opisujący podprzestrzeń $V_0 + V_1$ oraz bazę $V_0 + V_1$

2. Znajdź bazę przecięcia oraz bazę sumy algebraicznej dwóch podprzestrzeni $U, V \subset \mathbb{R}^4$.

$$U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; y + z - t = 0,\, x + y - z - t = 0 \right\}, \qquad V := \left\{ p \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Dowieść, że jeżeli $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ jest *macierzą trójkątną*, tzn. macierz A jest postaci

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n \\ 0 & a^2{}_2 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^n{}_n \end{bmatrix},$$

   to $\det A = a^1{}_1 a^2{}_2 \dots a^n{}_n$.

4. Obliczyć wyznaczniki macierzy (redukując macierz do postaci trójkątnej, lub stosując rozwinięcie Laplace'a).

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

5. Niech $V_n \in \mathbb{R}^n{}_n$. Wykazać korzystając z zasady indukcji matematycznej, że

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

6. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & p & -p \\ 0 & 2p & 0 & p-1 \\ p & 0 & 2p-1 & -p \\ 0 & p & 0 & p-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+p \\ 1 \\ p \end{bmatrix}.$$

Zadania „rezerwowe" - w razie jakby było „obowiązkowych" za mało:

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} t - 4x + y + 2z = 1 \\ t + 5x + y - z = 7 \\ 2t - 7x - 2y + z = -4 \\ 3t - x + y + z = 7 \\ t + 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

2. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3-t \end{bmatrix}.$$

Dla jakich wartości parametru t macierz ta jest nieosobliwa?

3. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, które z powyższych macierzy są nieosobliwe.

4. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{wiedząc, że } \alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} 0 & u & x & z \\ -u & 0 & v & y \\ -x & -v & 0 & w \\ -z & -y & -w & 0 \end{bmatrix}$$

5. Dla układu równań

$$\begin{pmatrix} 3\lambda - 1 & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 & 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

określić liczbę rozwiązań (i znaleźć je) w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.